Los cuantificadores (*Para todo* y *No existe*) en los primeros encuentros de les estudiantes con expresiones algebraicas

Andrés, Marina[1]**; Borsani, Valeria**[1]**; Cambriglia, Verónica**[2]**; Di Rico, Enrique**[1]**; Igolnikov, Nicolás**[1]**; Luna, Juan Pablo**[1]**; Matovich, Mariana**[1]**; Sessa, Carmen** [1,3]

[1]Universidad Pedagógica Nacional; [2]Universidad Nacional de General Sarmiento
[3]carmen.sessa@unipe.edu.ar

Resumen

En el marco de un proyecto de investigación colaborativa se diseñó y se puso en aula una propuesta de enseñanza para la entrada al álgebra. El contexto de la divisibilidad nos permitió diseñar una secuencia que vincula el trabajo aritmético previo de les estudiantes y las nuevas prácticas algebraicas que queremos desplegar en el aula.

En esta comunicación, analizamos situaciones de aula cuando les estudiantes se enfrentan a los primeros problemas que involucran expresiones algebraicas y a la presencia implícita de cuantificadores.

Nuestro estudio nos permite identificar y analizar la complejidad que implica, para les estudiantes, acceder y expresar la generalidad en el proceso de apropiación con sentido de ciertos recursos del álgebra.

Palabras clave: transición aritmética-álgebra; proceso de generalización; cuantificadores; situaciones de aula.

Introducción

Esta comunicación se inscribe en una investigación colaborativa entre docentes de escuela secundaria y docentes investigadores universitaries. Nos propusimos diseñar y estudiar un trayecto para primer año de la escuela secundaria que permitiera un tejido entre las experiencias aritméticas de les estudiantes y las prácticas algebraicas en las que se les quiere involucrar.

Algunos elementos teóricos que son fundamento de nuestra propuesta

Chevallard (1984), Vergnaud, Cortés y Favre-Artigue (1987), Grugeon-Allys & Pilet (2017) y Sadovsky (2004) han puesto en evidencia, en sus investigaciones en torno a la entrada al álgebra, que el pensamiento algebraico se construye con apoyo en el pensamiento aritmético y, al mismo tiempo, con importantes marcas de rupturas con él.

Chevallard (1984) señala que mientras que la aritmética “práctica” utiliza el lenguaje numérico por su poder designativo, la aritmética “algebraica”, por el contrario, aprovecha el valor mostrativo de las escrituras, que constituye la característica esencial del lenguaje algebraico. Sus investigaciones fueron fundantes para el desarrollo de la didáctica del álgebra como campo de la Didáctica. Estas ideas fueron centrales en Borsani, Luna & Sessa (2021), donde se estudian producciones en el aula.

En su ya clásico texto, Arcavi (1994) enuncia diferentes “conductas” que considera que es necesario adquirir para lograr tener un sentido de los símbolos. En particular, retenemos para nuestro trabajo la idea potente de que se puede leer información de una expresión algebraica, antes de manipularla y también que se puede manipular para leer nueva información.

Sobre las intenciones de nuestra propuesta

Nuestra propuesta se ubica en el contexto de la divisibilidad: la cuestión que articula todas las actividades es decidir si un número, dado a través de una expresión numérica o de la evaluación de una expresión algebraica, es múltiplo de otro. Las primeras actividades involucran expresiones numéricas de cálculos que combinan varias operaciones y posteriormente se trabaja con expresiones algebraicas. En todos los casos se trata de leer información de la expresión, eventualmente luego de transformarla. Por ejemplo, en la primera parte de la secuencia se les propone a les estudiantes decidir si $20\,.\,7 + 6$ es o no múltiplo de 4, sin hacer la cuenta.[1]

Los cuantificadores en los primeros encuentros con expresiones algebraicas

En esta comunicación nos interesa detenernos en las producciones y en las interacciones en el aula que tienen lugar a propósito de ellas, cuando les estudiantes enfrentan el problema 10.[2] Este problema se ubica entre los primeros en los que les alumnes deben interactuar con expresiones algebraicas y la presencia implícita de cuantificadores comporta una marca importante de ruptura entre el trabajo aritmético y el algebraico.

PROBLEMA 10

a. Si es posible, encontrá tres valores de la variable x para los cuales $14\,.\,x + 7$ sea múltiplo de 7, y tres valores de x para que no lo sea. Explicá tus respuestas.

b. Si es posible, encontrá tres valores de la variable x para los cuales $14\,.\,x + 8$ sea múltiplo de 7, y tres valores de x para que no lo sea. Explicá tus respuestas.

Analicemos brevemente el problema. En ambos ítems se piden valores particulares de la variable para que la expresión numérica que se obtiene al evaluarla cumpla cierta condición (en este caso, que sea múltiplo de 7). Nuestra intención es que les estudiantes, apoyades en los diferentes reemplazos que realicen, puedan producir argumentos de carácter general que involucren el uso de cuantificadores.

Las expresiones algebraicas propuestas están compuestas por dos términos, uno de ellos es el producto entre un múltiplo de 7 y la variable y el otro es un término independiente. En ese sentido, según cuál sea el término independiente, las expresiones evaluadas serán –o no– múltiplos de 7. La intención del problema, al solicitar que se encuentren varios valores, es que les estudiantes exploren y conjeturen acerca de la posibilidad o imposibilidad de dar respuesta. Consideramos que la imposibilidad de cumplir parte de la consigna permite movilizar la producción de argumentos de carácter general.

En lo que sigue enfocaremos nuestro análisis en el ítem a) del problema. Esperábamos que, para cualquier valor que propusieran, les estudiantes pudieran leer que la expresión numérica en cuestión es múltiplo de 7, lo cual les permitiría responder la primera parte de la consigna sin dificultad. Para realizar esta lectura, podrían poner en juego

[1] Para más detalles de la propuesta se sugiere leer Grupo Lunes (2022).
[2] Los asuntos aquí comunicados serán tratados en extenso en un artículo que estamos finalizando.

estrategias construidas en las primeras actividades, al interactuar con expresiones numéricas.

En nuestras experiencias de aula pudimos identificar que algunes estudiantes, a la hora de encontrar tres valores para que la expresión evaluada resulte múltiplo de 7 (en el ítem a)), eligen valores de x que son múltiplos de 7. Interpretamos que al garantizar que todos los números en la expresión sean múltiplos de 7, podrían no estar considerando la totalidad de la expresión como un número perdiendo de vista las operaciones involucradas. Por otro lado, pensamos que les estudiantes se podrían estar apoyando en un teorema en acto **T** (Vergnaud, 1990), que puede formularse como sigue: "en una expresión algebraica, reemplazar la variable por un múltiplo de $\boldsymbol{a}$ da como resultado una expresión que es múltiplo de $\boldsymbol{a}$".[3] En este sentido, la pregunta por tres valores para los cuales la expresión no sea múltiplo de 7 abre la posibilidad de discutir en el aula que la condición que aparece en **T** no es necesaria para esta expresión. En particular, esperamos que se concluya colectivamente que no existe un valor de la variable para el cual la expresión resulte no múltiplo de 7. Para ello será necesario que se trascienda la contingencia de los números particulares[4] para elaborar argumentos de carácter general, los cuales involucrarán el trabajo con cuantificadores[5].

El uso de los ejemplos en la construcción de la generalización.

Identificamos diferentes maneras en que les estudiantes pueden poner en vínculo el trabajo con valores "particulares" y la construcción de una generalidad. Consideramos que, para que los particulares se constituyan en "ejemplos", será necesario que estén acompañados de argumentos, relaciones y propiedades. En este sentido presentamos el análisis de la producción de le alumne C, a propósito del ítem a) (Figura 1). Nos interesa focalizar en la elección que hace de los valores de x, en su manera de argumentar y en la relación entre la lectura que realiza y la generalización final a la que arriba.

---

[3] Este teorema es verdadero solamente en un cierto dominio de expresiones algebraicas al cual pertenece $14x + 7$.

[4] Nos interesa la distinción que Mason (1996) realiza entre ejemplo y particular. Para el autor, la característica de un ejemplo es la expresión de una determinada generalidad para un sujeto dado. El particular, a diferencia del ejemplo, no posee una característica general que el sujeto está considerando.

5 Era nuestra intención, a partir de este problema, analizar con les estudiantes que, al buscar valores de la variable que hagan cumplir una condición sobre una expresión algebraica, se pueden dar tres situaciones excluyentes: que se cumpla para todo valor de la variable; que se cumpla para algunos valores de la variable y para otros no y que no se cumpla la condición para ningún valor de la variable.

Ensenada, 6, 7 y 8 de septiembre de 2023 – ISSN 2250-8473

El primer valor de x que elige presentar es $x = 7$. Nos interesa señalar que el argumento de le estudiante es que "todos los números son múltiplos de 7". Además, utiliza tres arcos por debajo de cada número que acompaña con la frase "Mult. 7". Si bien no menciona explícitamente que la expresión que obtiene es múltiplo de 7, interpretamos que recurre al teorema **T** antes mencionado.

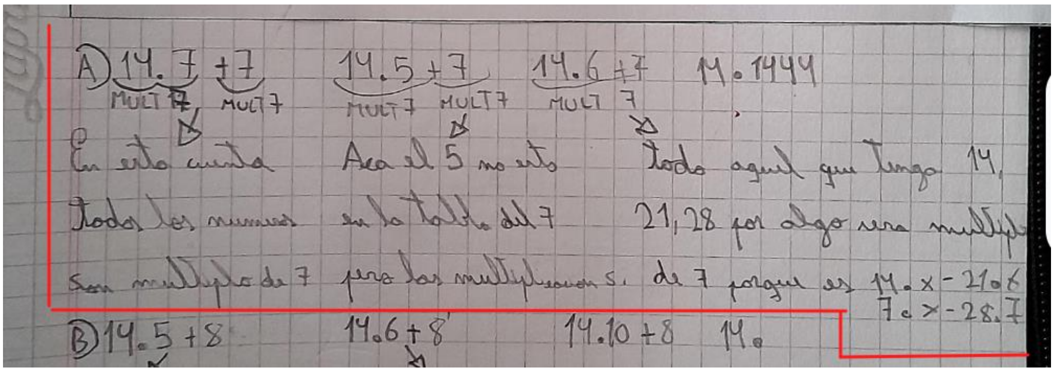

Figura 1. Producción de le estudiante C.

En el segundo reemplazo elige aclarar que el "5 no está en la tabla del 7, pero la multiplicación sí". Esta mención, bajo un solo arco para el primer término, enfatiza una cualidad del número 5 como representante de los no múltiplos de 7 que no obstaculiza que el producto sea múltiplo de 7. Con esta interpretación sobre la forma en que le estudiante elige el 5 como ejemplo de los no múltiplos de 7 podemos conjeturar que, en el reemplazo anterior con $x = 7$, consideró al 7 como un ejemplo de los múltiplos de 7.

En el tercer reemplazo, interpretamos que el 6 es un ejemplo de un número cualquiera dado que no menciona ninguna característica de ese número. Además, en la frase "todo aquel que tenga 14, 21, 28 por algo será múltiplo de 7 porque…" interpretamos que le alumne se posiciona de manera general respecto del primer término y a su vez enumera algunos múltiplos de 7 para referirse a cualquier múltiplo de 7. El 6 no aparece mencionado, sino en su lugar la palabra "***algo***". Esta interpretación de la frase nos conduce a resaltar la necesidad del uso de cuantificadores para poder argumentar en tareas que involucran el estudio de condiciones sobre expresiones algebraicas.

En relación con el último valor que propone le estudiante C, $x = 1444$, vemos que no puede ser ubicado, rápidamente, en la categoría de múltiplo o en la de no múltiplo de 7.

En este caso, no hay argumentos acompañando la elección; anticipamos que C quiere resaltar que esta categorización no es necesaria para responder si la expresión numérica es múltiplo de 7. En efecto, en la discusión colectiva, le estudiante relata que propuso ese número con la intención “de que (sus compañeres) se den cuenta de que pueden poner cualquier número”. Su elección persigue una intención comunicativa.

Un análisis sucesivo de cada reemplazo que realiza le estudiante y el orden en que escribe nos permite conjeturar un cambio de estatus de los números que es solidario a una cierta progresión en la generalidad de los argumentos. Sus argumentos, involucran relaciones, propiedades de las operaciones y el uso de cuantificadores, y se sostienen en una mirada general de los valores que elige.

La construcción colectiva de que la respuesta “ningún valor de la variable cumple la condición pedida” es válida en la clase de matemática

En la segunda parte del ítem a) se piden valores de x para que $14\,x + 7$ no sea múltiplo de 7. En nuestras anticipaciones pensamos que el hecho de no encontrar ningún valor podría ser el soporte, para algunes estudiantes, para generalizar que, para todo valor de la variable, la expresión será múltiplo de 7. Esto completaría la respuesta de la primera parte, en la que sólo se pedían 3 valores. También anticipamos que, algunes estudiantes podrían llegar a la generalización al ocuparse de la primera parte y que eso les daría por respondida la segunda. Veamos el tratamiento de este asunto en algunas producciones particulares y en la discusión que se hace en el espacio colectivo donde ocurren cuestiones no anticipadas.

Nos detenemos en los intercambios al interior de un grupo resolviendo el ítem a. Es un momento de trabajo de les estudiantes sin la presencia de le docente.

La primera idea que ponen en juego da cuenta de la vigencia del teorema en acto **T**, mencionada anteriormente: “en una expresión algebraica, reemplazar la variable por un múltiplo de ***a*** da como resultado una expresión que es múltiplo de ***a***”. Para la expresión algebraica $14x + 7$, esta suposición no produce contradicciones, pero la condición de reemplazar la variable por un múltiplo de ***a*** no es necesaria. Les estudiantes no parecen darse cuenta de eso, a pesar de que no la usan explícitamente en sus argumentos: *porque ya 14 está en la tabla del 7, y el 7 también… (*se refiere al segundo término*) Y si le sumas 7 al número que tenés* (se refieren al primer término) *va a seguir siendo múltiplo de 7.*

Ahora bien, el grado de confianza en que la condición de múltiplo de ***a*** es necesaria para lograr que la expresión resulte múltiplo de ***a***, hace que, para abordar la segunda parte del ítem, tengan una convicción de que van a lograr un “no múltiplo” poniendo un valor "no múltiplo" a la variable. Recuperamos los dichos de une estudiante del grupo en esta búsqueda: *Y cuando pongamos valores de x para que no lo sea… ah se pone, se pone un número que no sea múltiplo de 7, para que la cuenta* (se queda pensando) ... *no sea múltiplo…¡no, no, no!.* En el transcurso de su oralidad realiza ciertos silencios que, interpretamos, expresan dudas sobre lo que anticipó, y al final parece advertir que no va a obtener un no múltiplo, contra su posición inicial. No sabemos si mientras tanto va probando con algún valor, o razonando de manera general sobre la expresión algebraica a partir de su argumentación anterior. Pensamos que el hecho de que no hayan usado antes para argumentar que el valor de la variable es múltiplo, le permitió darse cuenta de que evaluando en *no múltiplos*, arribaban a la misma respuesta.

El grupo entiende que no va a poder producir *no múltiplos*, que siempre va a obtener /producir múltiplos, sea cual sea el valor de la variable. La búsqueda de *no múltiplos* funcionó, en este grupo, tal como habíamos anticipado, como un soporte para llegar a una generalización.

Algo bien diferente ocurre con la producción de le estudiante C (Figura 1). Como vimos en el apartado anterior, este estudiante llega a generalizar que para todo valor de x la expresión $14x + 7$ es múltiplo de 7 y no hay mención en su hoja a la segunda parte del ítem a. Posiblemente, la da por respondida.

En la instancia de discusión colectiva, parece haber un consenso general acerca de que con cualquier valor de la variable la expresión evaluada será múltiplo de 7 y se dan distintos argumentos. Aun así, la docente formula la pregunta de la segunda parte *¿hay valores de x para que* $14x + 7$ *no dé múltiplo de 7?* y la respuesta no es unánime. Se proponen algunos valores de la variable con el objetivo de que la expresión no sea múltiplo de 7; en particular, une estudiante propone el valor 0 como un número "raro". En este caso, la cuenta se volvió necesaria para saldar un asunto problemático para les estudiantes. Pensamos varias explicaciones de por qué al proponer valores no se retomó lo que se había consensuado en la primera parte:

- que usen la expresión "cualquier número" con un sentido más cercano al cotidiano que refiere a un genérico y no necesariamente a la totalidad.
- que no tengan disponible que las categorías "ser múltiplo de 7" y "ser no múltiplo de 7" son mutuamente excluyentes.
- que aborden la nueva pregunta de manera independiente de lo que se trabajó antes.

- que crean que contestar “no existen números” no es parte del repertorio de respuestas correctas, aceptables, admisibles, en una clase de matemática.

Entendemos que todas las concepciones anteriores pueden presentarse con matices e intensidades variables, están fechadas y pueden estar presente más de una de ellas, en un momento dado, en un misme estudiante.

La clase siguiente, luego de recuperar entre todes que “para cualquier valor de x la expresión $14x + 7$ da múltiplo de 7”, une estudiante pregunta “*si ahí puede ir cualquier número, ¿cuáles serían los no múltiplos?*”. Interpretamos esta pregunta en el plano de lo normativo, como ya mencionamos, solicitando un modo que le permita responder a lo que se pide. Es decir, admite que no hay valores posibles y estaría preguntando cómo se responde de una manera matemáticamente aceptada como correcta.

Esta dificultad de aceptar como respuesta “no existen valores” también la encontramos en otra aula, al enfrentar un problema similar. Les estudiantes debían completar con números en la línea punteada para que la expresión $8x \ldots\ldots +25$ sea múltiplo de 4. Ante la incomodidad que les produce esta situación une estudiante propone cambiar la expresión para lograr que existan valores que cumplan la condición, le docente lo acepta y lo propone como tarea conjunta en el espacio colectivo. Las propuestas de les estudiantes quedan plasmadas en el siguiente pizarrón (Figura 2).

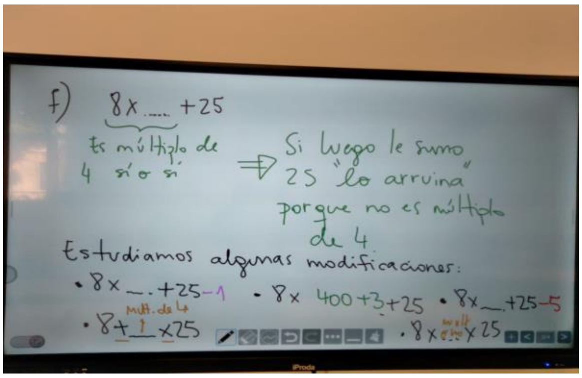

Figura 2. Pizarrón con cambios de la expresión realizados por les estudiantes.

Todas estas transformaciones que proponen les estudiantes generan expresiones que no son equivalentes a la dada y movilizan relaciones y propiedades que se vienen trabajando en la secuencia. En otro plano, este escenario es una manifestación de la dificultad de enfrentarse a este tipo de preguntas y la necesidad de abordarla en actividades posteriores de la secuencia.

A modo de cierre

En el problema que hemos analizado en esta comunicación, les estudiantes enfrentan situaciones cuyas respuestas implican un grado de generalidad como ser "para todo valor" y "no existe valor".

En el primer caso, ¿cómo expresar esa generalidad? Intentamos mostrar cómo los ejemplos son utilizados por une estudiante de maneras diferentes con la intención de expresar dos generalizaciones relativas a la situación que está tratando. Hay un modo muy personal de acercarse a la generalización sin disponer aún de un lenguaje algebraico.

En el segundo caso, cuando la respuesta es "no existe valor", las situaciones de aula analizadas muestran la complejidad de aceptar –por parte de les estudiantes– este tipo de respuestas como matemáticamente correctas.

Son asuntos ineludibles del trabajo algebraico y que, desde nuestra posición, es formativo enfrentarlos desde los primeros encuentros con las expresiones algebraicas. Esperamos que las producciones en el aula que mostramos y el análisis compartido hayan permitido acceder a la intimidad de estas primeras experiencias y aportar elementos para comprender la complejidad de la ruptura entre la aritmética y el álgebra.

Referencias bibliográficas

Arcavi, A. (1994). *Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics*. For the Learning of Mathematics, 14 (3), 24-35.

Borsani, V., Luna, J. y Sessa, C. (2021). El valor mostrativo de las expresiones numéricas: tensiones entre las escrituras de les estudiantes y las que ofrece el docente. *Revista EFI- DGES.* Ministerio de Educación (Provincia de Córdoba), 7 (12), 29-47. Recuperado de http://dges-cba.edu.ar/wp/index.php/revista-efi/

Chevallard, Y. (1984). *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie: l'évolution de la transposition didactique.* Petit x, 5, 51-94.

Grugeon-Allys, B. y Pilet, J. (2017). *Quelles connaissances et raisonnements en arithmétique favorisent l'entrée dans l'algèbre?* Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 20(3), 106-130.

Grupo Lunes (2022). Una entrada al álgebra en vínculo con la Aritmética. *Revista Urania.* 12, 8-20. Recuperado de https://drive.google.com/file/d/11IZKDOR9tKsLb6cJNm8Y9tAU1GvlYfKB/view

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bernardz et al. (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sadovsky, P. (2004). *Condiciones Didácticas para un Estudio de Articulación entre Prácticas Aritméticas y Prácticas Algebraicas* [Tesis Doctoral]. Universidad de Buenos Aires-Facultad de Filosofía y Letras, Argentina.

Vergnaud, G. (1990) *La théorie des champs conceptuels*. Recherches en Didactiques des Mathématiques, Grenoble, 10 (2/3), 133 - 170.

Vergnaud, G., Cortes, A. et Favre-Artigue, P. (1987). Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. *Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (p. 259-288). Grenoble : La Pensée Sauvage.